三角形の決定を用いた「新たな」三角形の面積公式への考察

高橋 孝治（中国政法大学 刑事司法学院，wo3jiao4xiao4zhi4@yahoo.co.jp）

Essay of a “new” triangular area formula using triangular decision

Koji Takahashi (Criminal Justice College, China University of Political Science and Law, China)

要約
三角形の面積公式にはいろいろなものがある。三角形が決定されるときには、三角形の面積も決定しているはずである。確かに、三角形の面積公式は、「底辺かける高さ割る2」以外の式は、全て三角形の決定条件と関連している。そこで、本稿は、三角形の決定条件を用いて、これまで一般的に知られていない三角形の面積公式を探ることを試みる。本稿では特に一角と一辺、辺の総和の三つが明らかな三角形の面積公式を探ろうとする（この三つが明らかな場合にも三角形は決定する）。本稿での証明では当該一角が分かっている一辺の両角の一つなのか対角なのかで式が変わってしまった。そのため、三角形の一角と一辺、辺の総和の三つが明らかなだけでは足りず、当該一角の位置も明らかとなる必要があるとするが、今までに一般的に示されていなかった三角形の面積の求め方を示すという作業に一歩程度は貢献できたものと考えると述べる。

キーワード
数学，幾何学，三角形，面積公式，三角形の決定

1. はじめに

1.1 問題の所在

三角形の面積Sの求め方と言えば、多くの者は式（1）を思い浮かべるだろう（ここで三角形の底辺をA、高さをBとする）。しかし、三角形の面積公式は式（1）のみではない（これまでで既知の三角形の面積公式は1.2で確認する）。三角形の面積とは、三角形の形状が決定されるときには決まるものである。それならば、三角形の形状が決定する場合には、その条件のみを用いて三角形の面積が求められるはずである。本稿は、このような考えのもと、これまでに一般に明らかにされていない三角形の面積公式を示すことを目的とする。

$$S = \frac{1}{2}AB \qquad (1)$$

1.2 一般的に既知の三角形の面積公式─議論の前提として

ここでは議論の前提として、一般的に明らかにされている三角形の面積公式を確認したい（矢野，1985: 236；矢野＝茂木他，1968: 200-201；三角形の面積の公式（私的数学塾ホームページ））。まず、図1のように、二辺A、Bとその間の角度αが分かっている三角形の面積Sは、式(2)で求められる。

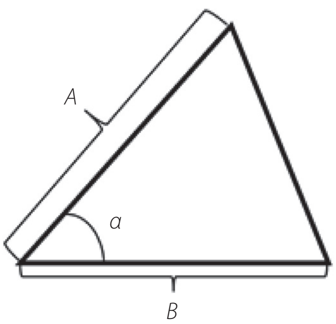

図1：二辺A、Bとその間の角度αが分かっている三角形

$$S = \frac{1}{2}AB\sin\alpha \qquad (2)$$

図2のように一辺Aとその両端の角度α、βが分かっている三角形の面積Sは式（3）で求められる。

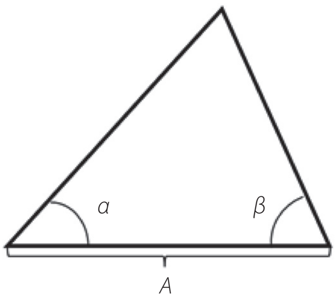

図2：一辺Aとその両端の角度α、βが分かっている三角形

$$S = A^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} \qquad (3)$$

図3のように三辺の長さA、B、Cが全て分かっている三角形において、$N = \dfrac{A+B+C}{2}$とするとき、その面積Sは式（4）で求められる（「Heronの公式」とも呼ばれる）。

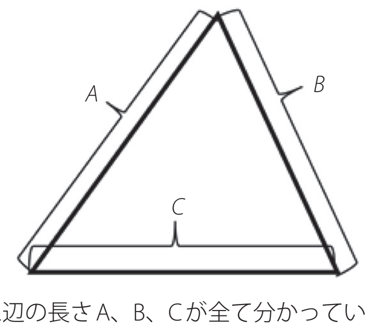

図3：三辺の長さA、B、Cが全て分かっている三角形

$$S = \sqrt{N(N-A)(N-B)(N-C)} \tag{4}$$

さらに、図4のように、外接円の半径Rと三つの角度α、β、γが分かっている三角形の面積Sは式(5)で求められる。

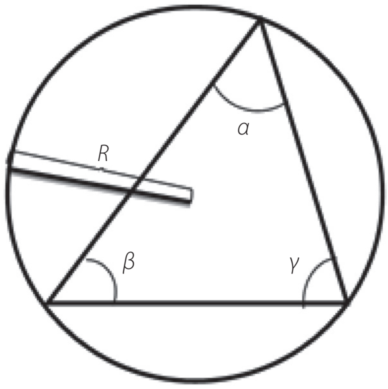

図4：外接円の半径Rと三つの角度α、β、γが分かっている三角形

$$S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \tag{5}$$

図5のように、内接円の半径rと三辺の総和Lが分かっている三角形の面積Sは式(6)で求められる。

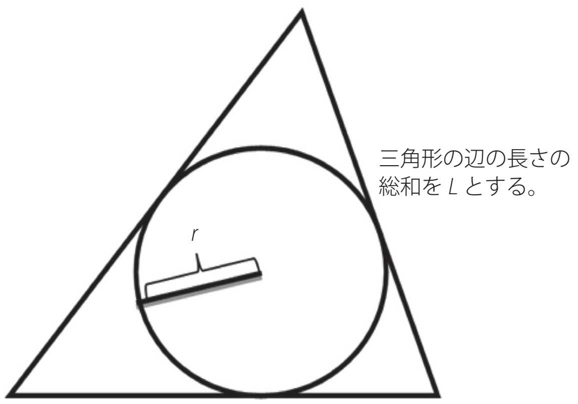

図5：内接円の半径rと辺の総和Lが分かっている三角形

$$S = \frac{rL}{2} \tag{6}$$

図6のように全ての辺A、B、Cと外接円の半径Rが分かっている三角形の面積Sは式(7)で求められる。

$$S = \frac{ABC}{4R} \tag{7}$$

図7のように一点が原点、他の二点を(a, b)、(c, d)とする座標上にある三角形の面積Sは式(8)で求められる。

$$S = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| \tag{8}$$

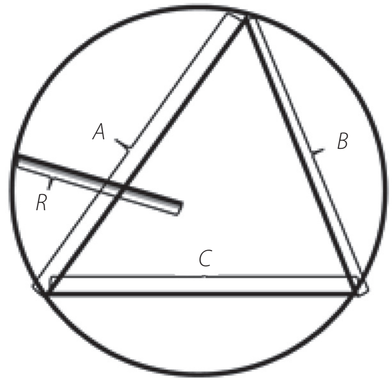

図6：辺A、B、Cと外接円の半径Rが分かっている三角形

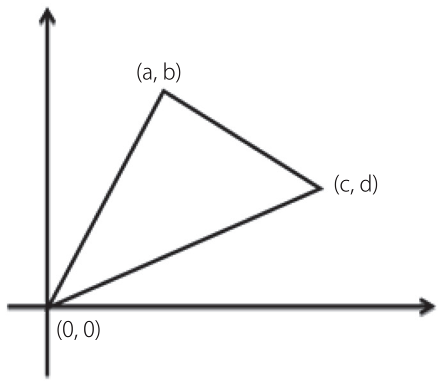

図7：座標上の原点、(a, b)、(c, d)を頂点とする三角形

図8のように二辺がベクトル$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$で示されている三角形の面積Sは式(9)で求めることができる。

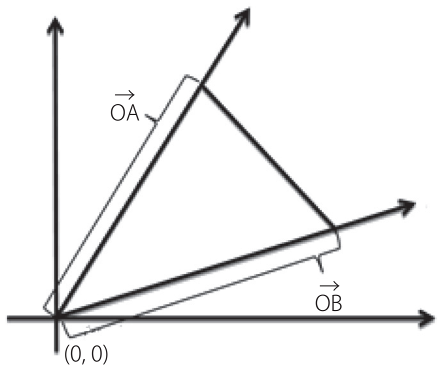

図8：二辺がベクトル$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$で示されている三角形

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2\ |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2} \tag{9}$$

また、三角形の内接円の半径rと、そのときできる3つの傍接円の半径r_1、r_2、r_3が分かっているとき、その三角形の面積Sは式(10)で求めることができる。

$$S = \sqrt{rr^1r^2r^3} \tag{10}$$

2. 三角形の決定と面積

2.1 三角形の決定条件

1.2で様々な三角形の面積公式を見た。1.2で挙げた公式を用いる場合に必要とする条件が決定されれば三角形の形状は反転を考慮しなければ一意的に決定する。例えば、三角形の決定条件として定理2.1が知られている。

定理2.1（三角形の決定条件）（矢野＝茂木他，1968：200）
(1) 二辺とその間の角がそれぞれ定められている
(2) 二角とその間の辺がそれぞれ定められている
(3) 三辺がそれぞれ定められている

この定理2.1の（1）で必要としている条件は、式（2）や、式(8)、式(9)の面積公式に対応している。そして、定理2.1の(2)で必要としている条件は、式(3)の面積公式に、(3)で必要としている条件は、式(4)や式(7)に対応している。また、定理2.1には挙げられていないが、式(5)、式(6)、式(10)のように三角形の外接円の半径Rと三つの角度α、β、γが分かっている場合、三角形の内接円の半径rと辺の総和Lが分かっている場合、内接円の半径rとそのときできる3つの傍接円の半径r_1、r_2、r_3が分かっている場合にも三角形は決定する。

三角形が決定すれば、面積もそのときに決定している。唯一三角形の決定と関係がないのは式（1）の場合であると言える(図9のように、底辺と高さが決定しても、明らかに三角形は一意的に決定しない)。もっとも、式（1）は、「三角形の面積の定義的な式」であり、例外的な式と位置付けてもかまわないと考えられる。

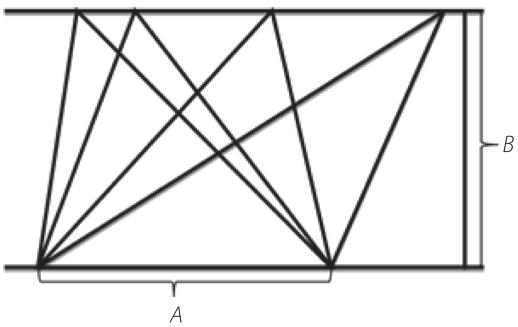

図9：底辺と高さが決定している三角形

2.2 新たな三角形の面積公式へ（直角三角形の場合）

ところで、三角形の形状が決定するのは、定理2.1の場合のみではない。例えば、直角三角形の場合のみに限定されるが、以下の（4）、（5）の場合にも三角形の形状は決定する[(1)]。つまり、この場合にも与えられた条件のみで三角形の面積が求められるはずである。

(4) 直角三角形において斜辺と1つの鋭角がそれぞれ定められている
(5) 直角三角形において斜辺と他の一辺がそれぞれ定められている

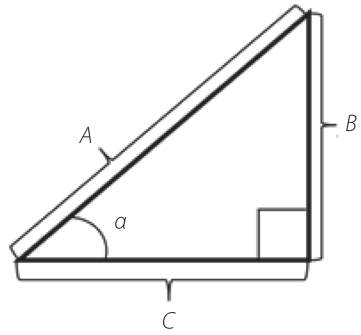

図10：直角三角形

ここからは、上記(4)、(5)の条件が定められた場合に、その条件のみから三角形の面積Sを求めることを試る。まずは、(4) 直角三角形において斜辺Aと1つの鋭角αがそれぞれ定められている場合である。また、証明に際して計算を簡単に行うため、残りの辺をB、Cとする(図10)。

2.2.1 証明

図10の直角三角形において、面積SをαとAのみを用いて示す。

辺B、Cは$B = A\sin\alpha$、$C = A\cos\alpha$と表すことができる。そのため、式（1）より、直角三角形において斜辺Aと1つの鋭角αがそれぞれ定められている場合、その面積Sは、$S = \frac{1}{2}BC = \frac{A^2\sin\alpha\cos\alpha}{2}$ となる。（証明終）

$$S = \frac{A^2\sin\alpha\cos\alpha}{2} \tag{11}$$

次に、（5）直角三角形において斜辺と他の一辺がそれぞれ定められている場合であるが、これも(図10)を用いて計算を行う。

2.2.2 証明

図10の直角三角形において、面積SをAとBのみを用いて示す。

辺CをAおよびBのみを用いて表せば、式(1)を用いて要求された条件のみで当該直角三角形の面積を求めることができる。

三平方の定理を用いると、$A^2 = B^2 + C^2$より$C = \sqrt{A^2 - B^2}$となる。そのため、式（1）より、面積Sは、$S = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}B\sqrt{A^2 - B^2}$ となる。

また、別解として以下の解法もあげられる。図10では、$\sin\alpha = \frac{B}{A}$ となるが、$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$より、$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2}$ である。$C = A\cos\alpha$なので、$C = A\sqrt{1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2}$となる。

式(1)より、面積Sは

$S = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BA\sqrt{1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2} = \frac{1}{2}B\sqrt{A^2 - B^2}$ となる。(証明終)

$$S = \frac{1}{2} B \sqrt{A^2 - B^2} \qquad (12)$$

2.3 新たな三角形の面積公式へ（一角と一辺と辺の総和が明らかな場合）

2.2では、直角三角形は（4）、（5）の場合にも、三角形の形状が決定するため、与えられた条件のみで面積が求められることを示した。しかし、三角形の形状が決定する場合はまだある。例えば、三角形の一角αと一辺A、辺の総和Lが明らかな場合にも三角形は決定する。とすればこの場合にも与えられた条件のみで三角形の面積は求められるはずである。そこで、本節ではこれを求めることを試みたい。

三角形の一角αと一辺A、辺の総和Lが明らかな場合に、その三角形の面積公式を求めようとする場合、まず①明らかになっている角が明らかになっている辺の両角の一つである場合、②明らかになっている角が明らかになっている辺の対角である場合の二つに分けて考える必要がある。

まず、①の場合について、その一角をβと置き、証明に際し計算を簡単に行うため、残りの一辺をBとする（図11）。

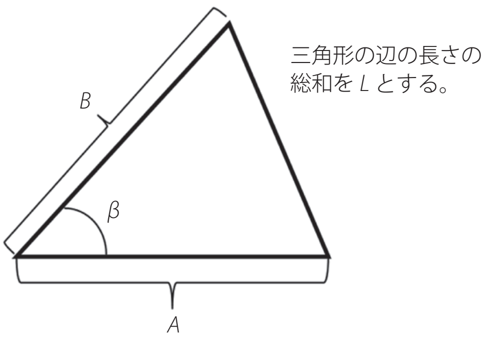

図11：一角βと一辺A、辺の総和Lが明らかな三角形－1

2.3.1 証明

図11の三角形の面積Sをβ、AおよびLのみを用いて示す。

余弦定理を用いれば次の式が成り立つ。

$$\{L - (A + B)\}^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\beta$$

これを整理し、Bについて解くと$B = \dfrac{L(L-2A)}{2(L-A+A\cos\beta)}$が得られる。これにより、式(3)より面積$S$は

$S = \dfrac{1}{2}AB\sin\beta = \dfrac{AL(L-2A)\sin\beta}{4(L-A+A\cos\beta)}$ となる。（証明終）

$$S = \frac{AL(L-2A)\sin\beta}{4(L-A+A\cos\beta)} \qquad (13)$$

次に、②の場合について、証明に際し計算を簡単に行うため、残りの二辺をB、Cとする（図12）。

2.3.2 証明

図12の三角形の面積Sをα、AおよびLのみを用いて示す。

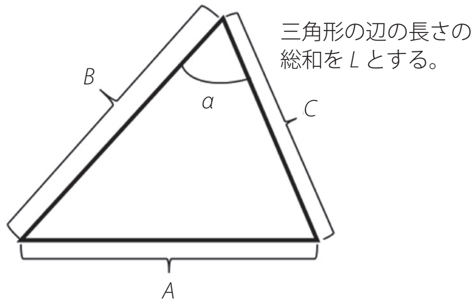

図12：一角αと一辺A、辺の総和Lが明らかな三角形－2

$C = \{L - (A + B)\}$ である。ここで、余弦定理を用いれば以下の式が成り立つ。

$$A^2 = B^2 + \{L - (A + B)\}^2 - 2B\{L - (A + B)\}\cos\alpha$$

これを整理し、Bについて解くと以下の式が得られる。なお、ここでは後の計算を簡単にするため平方根の中を有理化せずに示す。

$$B = \frac{1}{2}\left\{(L-A) \pm \sqrt{\frac{A^2 + 2AL - L^2 + (A-L)^2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right\}$$

この解は、重解となっているが、その一方の解はCの長さである。それは以下の式からも確認できる。

$$B = \frac{1}{2}\left\{(L-A) + \sqrt{\frac{A^2 + 2AL - L^2 + (A-L)^2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right\}$$ とすれば

$$C = L - (A + B)$$

$$= L - A - \frac{1}{2}\left\{(L-A) + \sqrt{\frac{A^2 + 2AL - L^2 + (A-L)^2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(L-A) - \sqrt{\frac{A^2 + 2AL - L^2 + (A-L)^2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right\}$$

よって $C = \dfrac{1}{2}\left\{(L-A) - \sqrt{\dfrac{A^2 + 2AL - L^2 + (A-L)^2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right\}$

であり、片方のみBの長さとして採用すればよい。

ここで式（3）を用いると、面積Sは$S = \dfrac{1}{2}BC\sin\alpha$より、以下の式で表すことができる。

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left\{(L-A) + \sqrt{\frac{A^2 + 2AL - L^2 + (A-L)^2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right\}$$

$$\times \frac{1}{2}\left\{(L-A) - \sqrt{\frac{A^2 + 2AL - L^2 + (A-L)^2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right\}\sin\alpha$$

$$= \frac{L(L-2A)\sin\alpha}{4(1+\cos\alpha)}$$

これにより、面積Sは$S = \dfrac{L(L-2A)\sin\alpha}{4(1+\cos\alpha)}$ となる。（証明終）

$$S = \frac{L(L-2A)\sin\alpha}{4(1+\cos\alpha)} \qquad (14)$$

式（13）と式（14）を合わせて、三角形の一辺Aと三辺の総和L、一角αが明らかにされているとき、その三角形の面積Sは

$$\begin{cases} \alpha \text{が}A\text{の両角の一つであるとき} S = \dfrac{AL\,(L-2A)\sin\alpha}{4\,(L-A+A\cos\alpha)} \\ \alpha \text{が}A\text{の対角であるとき} S = \dfrac{L\,(L-2A)\sin\alpha}{4\,(1+\cos\alpha)} \end{cases}$$

で求められると言える。

3. 結びにかえて

2.3で証明した①と②の場合の面積Sは、残念なことに異なる式となってしまった。そのため、ここで証明した式を用いる場合、「三角形の一角αと一辺A、辺の総和L」が明らかであるだけではなく、一角αがと一辺Aの両角の一つなのか、一辺Aの対角なのかも明らかでなければならない。そのため、「三角形の形状が決定する場合には、その条件のみを用いて三角形の面積が求められるはず」ではないかという、1.1で述べた本稿の目的を満足させない結果となってしまった。しかし、今までに一般的に示されていなかった三角形の面積の求め方を示すという作業に一歩程度は貢献できたものと考える。

本稿は、まだ「一歩程度の貢献」を示したに過ぎない。今後、「三角形の形状が決定する場合には、その条件のみを用いて三角形の面積が求められるはず」との論を深めていくのは今後の課題である。

注

(1) これは直角三角形の合同条件を基にしている。三角形の合同条件と決定条件には対応関係がある（佐藤，2006: 54）。

引用文献

矢野健太郎（監修）（1985）．数学ハンドブック．森北出版．

矢野健太郎，茂木勇他（編著）（1968）．数学小辞典．共立出版．

佐藤英雄（2006）．複素数の世界（2）．和歌山大学教育学部紀要 教育科学，Vol. 56，51-57．

三角形の面積の公式．私的数学塾ホームページ，http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/heron/heron.htm（2016年10月1日閲覧）．

（受稿：2016年10月4日　受理：2016年11月2日）